

Datos generales <sup>1</sup>						
Plantel	34 Alan Sacjun		Coordinación	Selva	Semestre	Quinto
Ubicación del plantel	Chilón		UAC	Taller de Pensamiento Variacional 1.		
Datos de la progresión del aprendizaje <sup>2</sup>						
Etapa de la progresión (Número)		7	Tiempo total de ejecución		6 horas	
Enunciado de la progresión		Aplica o construye modelos para encontrar la solución de situaciones-problema de su contexto, usando la derivada como una herramienta que le permite interpretar y explicar fenómenos de variación estudiados por las ciencias, considerando herramientas analíticas o tecnológicas en la modelación <b>(C2M1, C2M4, C3M1, C3M2, C3M4, C4M1)</b> .				
Categoría		<b>C2:</b> Procesos de intuición y razonamiento. <b>C3:</b> Solución de problemas y modelación. <b>C4:</b> Interacción y lenguaje matemático.				
Subcategoría		<b>C2 S1:</b> Capacidad para observar y conjeturar. <b>C3 S2:</b> Construcción de modelos. <b>C4 S1:</b> Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. <b>C4 S3:</b> Ambiente matemático de comunicación.				
Metas de aprendizaje		<b>C2M1:</b> Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. <b>C2M4:</b> Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto. <b>C3M1:</b> Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto. <b>C3M2:</b> Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. <b>C3M4:</b> Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático. <b>C4M1:</b> Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.				

<b>Aprendizaje de trayectoria (equivale al perfil de egreso)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales, tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).</li> <li>- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.</li> <li>- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.</li> </ul>
--	---

<b>Abordaje de la progresión del aprendizaje</b>				
	<b>Descripción de la estrategia o actividad</b>	<b>Tiempo de ejecución</b>	<b>Recursos/ material didáctico</b>	<b>Instrumentos de evaluación.</b>
<b>Apertura</b>	<p><b>Encuadre / presentación de la etapa de la progresión.</b></p> <p>La o el docente realiza el encuadre de la UAC, considerando:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Metodología de trabajo.</li> <li>• Temas a abordar en esta progresión.</li> <li>• Criterios de evaluación.</li> <li>• Fuentes de información bibliográficas, páginas web, entre otros.</li> </ul> <p>La o el docente realiza una evaluación diagnóstica a fin de identificar los saberes previos e ideas intuitivas que poseen las y los estudiantes sobre: cuando una función es creciente y decreciente, en donde se localiza el punto máximo, mínimo y punto de inflexión en la gráfica de una función.</p>	60 minutos	Pizarrón, Plumones, libretas de apunte y bolígrafos.	No aplica.

<b>Desarrollo</b>	<p>En este apartado se propone que la o el docente se apoye del <b>Anexo 1 (Diapositivas)</b>, para explicar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Los intervalos en donde una función es creciente y decreciente.</li> <li>✓ El criterio de la primera derivada para calcular coordenadas de puntos máximo y mínimo.</li> <li>✓ El criterio de la segunda derivada para calcular las coordenadas de los puntos: máximo, mínimo y punto de inflexión.</li> </ul> <p>Posteriormente, la o el facilitador, mediante una clase magistral, resuelve problemas tipo, en donde se determinen los intervalos de una función creciente y decreciente, plasmándolo gráficamente, obteniendo coordenadas de puntos máximo, mínimo y punto de inflexión, utilizando el criterio de la primera y segunda derivada.</p> <p><b>Nota:</b> queda a libertad de la o el facilitador que los alumnos practiquen en el aula o fuera de ella (extraclases).</p>	240 minutos	Laptop, proyector, televisor, pizarrón, plumones, borrador, bolígrafos.	No aplica.

<b>Cierre</b>	<p>En equipos de tres integrantes, los alumnos resuelven un ejercicio en donde pongan en práctica lo aprendido en esta progresión.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Intervalos en donde la función sea creciente y decreciente.</li> <li>➤ Obtención de las coordenadas de punto máximo y mínimo utilizando el criterio de la primera derivada.</li> <li>➤ Obtener las coordenadas del punto de inflexión utilizando criterio de la segunda derivada, para posteriormente graficar la función de una función.</li> <li>➤ Función a resolver: <math>f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12</math></li> </ul>	60 minutos	Libreta de apuntes, calculadora, bolígrafos.	Lista de cotejo ( <b>Anexo 2</b> ).
---------------	--	------------	--	-------------------------------------

Fuentes de consulta						
Bibliográfica	Videográfica	Páginas web				
<ul style="list-style-type: none"><li>• Ortiz C. F. J. (2007). Cálculo Diferencial. México: Grupo Editorial Patria.</li><li>• Cuellar C. J. A. (2012). Matemáticas V México: Mc. Graw Hill.</li><li>• Leithol, L. (1998) Cálculo Diferencial e Integral. Oxford: University Press.</li><li>• Granville, William Anthony, (2008) Caáculo Diferencial e Integral. México: Limusa.</li></ul>	<b>Matemáticas profe Alex, Máximos y mínimos de una función   Ejemplo 1, Youtube,</b> <a href="https://youtu.be/pp14NKTSxw?si=emuOpcAbn3s7wdfi">https://youtu.be/pp14NKTSxw?si=emuOpcAbn3s7wdfi</a>	<a href="https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus">https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus</a>  <a href="https://superprof.es">https://superprof.es</a>  <a href="https://www.neurochispa.com">https://www.neurochispa.com</a>				
<table><tr><td><b>ELABORÓ</b></td><td><b>REVISÓ</b></td></tr><tr><td><b>Ing. Alan Sebastián Díaz Gálvez</b></td><td><b>Lic. Sergio Santos Moreno</b></td></tr></table>			<b>ELABORÓ</b>	<b>REVISÓ</b>	<b>Ing. Alan Sebastián Díaz Gálvez</b>	<b>Lic. Sergio Santos Moreno</b>
<b>ELABORÓ</b>	<b>REVISÓ</b>					
<b>Ing. Alan Sebastián Díaz Gálvez</b>	<b>Lic. Sergio Santos Moreno</b>					

## Anexo1



### Intervalo creciente y decreciente de una función



Cuando una función es derivable, podemos conocer si es creciente o decreciente en cualquier punto siguiendo las siguientes condiciones:

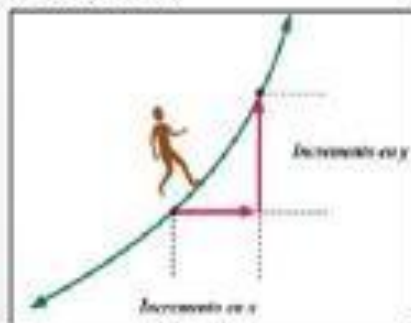
- Una función  $f(x)$  es creciente en un punto " $a$ ", si su derivada es positiva.

Es decir,  $f'(a) > 0$ ,  $\Rightarrow f$  es creciente en  $x = a$ .

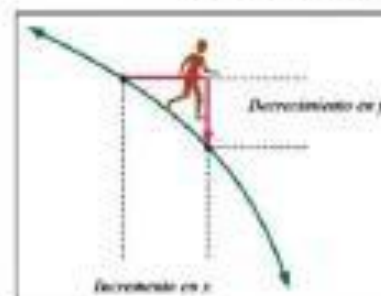
- Una función  $f(x)$  es decreciente en un punto " $a$ ", si su derivada es negativa.

Es decir,  $f'(a) < 0$ ,  $\Rightarrow f$  es decreciente en  $x = a$ .

Función creciente



Función decreciente



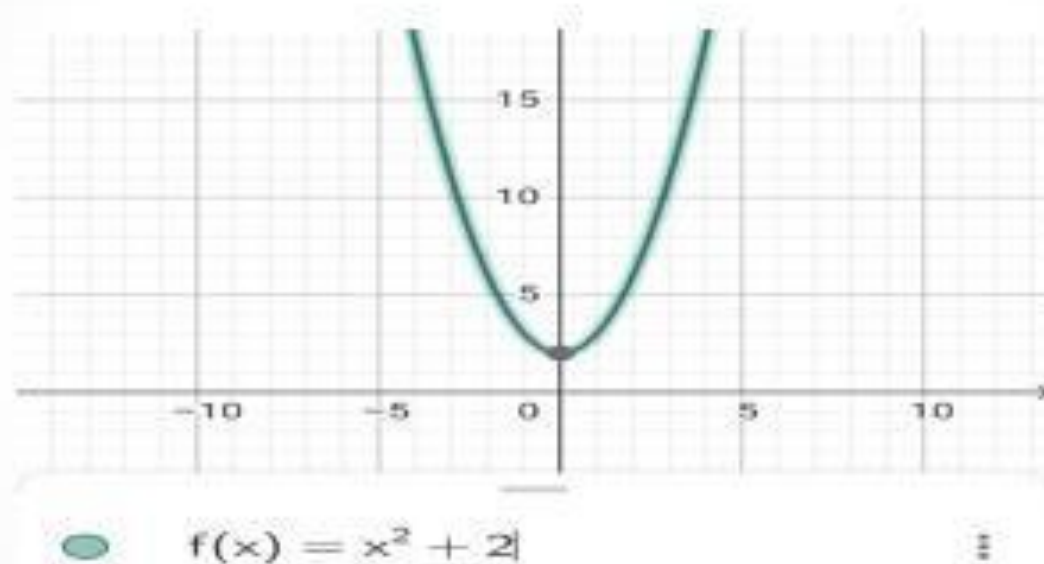
### Ejemplo: 1

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = x^2 + 2$

- Derivando la función nos queda:  $f'(x) = 2x$
- Igualamos la derivada a cero:  $2x = 0$
- Hallamos el valor de  $x$ :  $x = 0$
- Estudiamos el valor de la derivada para cualquier punto.

$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$f'(-2) = 2(-2)$ $= -4$	$f'(-1) = 2(-1)$ $= -2$	Valor crítico	$f'(1) = 2(1)$ $= 2$	$f'(2) = 2(2)$ $= 4$
Decreciente	Decreciente		Creciente	Creciente

Gráficamente queda de la siguiente manera:



**PROPUESTA DE PLANEACIÓN DIDÁCTICA**  
**RECURSO SOCIOCOGNITIVO TALLER DE PENSAMIENTO VARIACIONAL I**  
“2025, Año de Rosario Castellanos Figueroa.



## Ejemplo 2:

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

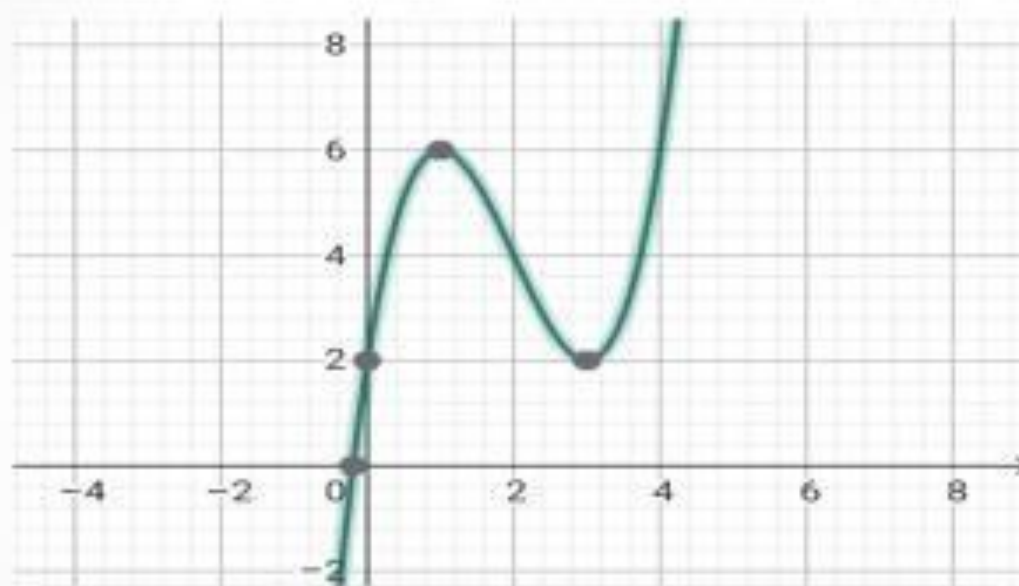
- Derivando la función nos queda:  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$
- Igualamos la derivada a cero:  $3x^2 - 6x + 9 = 0$
- Hallamos el valor de  $x$ , utilizando la fórmula general de la cuadrática:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = x_1 = 3, x_2 = 1$$

- Estudiamos el valor de la derivada para cualquier punto.

$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
La pendiente es positiva	La pendiente es negativa	La pendiente es positiva
		
Creciente	Decreciente	Creciente

Graficando la función queda de la siguiente manera:



$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

## Criterio de la primera derivada

- Se deriva la función.
- El resultado se iguala a cero y se obtienen los valores críticos para un máximo o mínimo.
- Al evaluar los valores críticos en la primera derivada, existe un punto mínimo relativo en los puntos en que pasa de decreciente a creciente.
- Al evaluar los valores críticos en la primera derivada, existe un punto máximo relativo en los puntos en que pasa de creciente a decreciente.
- Se grafica la función.

### Ejemplo:

Hallar las coordenadas del punto máximo y mínimo, aplicando el criterio de la primera derivada para la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

- Derivamos la función:  $f'(x) = 3x^2 - 6x$
- Igualamos a cero la derivada y obtenemos los valores críticos:  
 $3x^2 - 6x = 0$   
 $3x(x - 2) = 0$ , de aquí se obtiene que  $3x = 0$  y  $x - 2 = 0$
- Resultando  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 2$ , los cuales son los valores críticos para un punto máximo o mínimo.
- Posteriormente evaluamos los valores críticos para valores un poco menor y valores un poco mayor.

$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1)$ $f'(-1) = 9$	Valor crítico	$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1)$ $f'(1) = -3$
Creciente	Punto máximo	Decreciente

- Sustituimos el valor crítico en la función original para obtener las coordenadas del punto máximo.

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 3 = 3$$

- Por lo tanto, las coordenadas del punto máximo son:  $(0, 3)$

$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1)$ $f'(-1) = -3$	Valor crítico	$f'(3) = 3(3)^2 - 6(3)$ $f'(-1) = 9$
Decreciente	Punto mínimo	Creciente

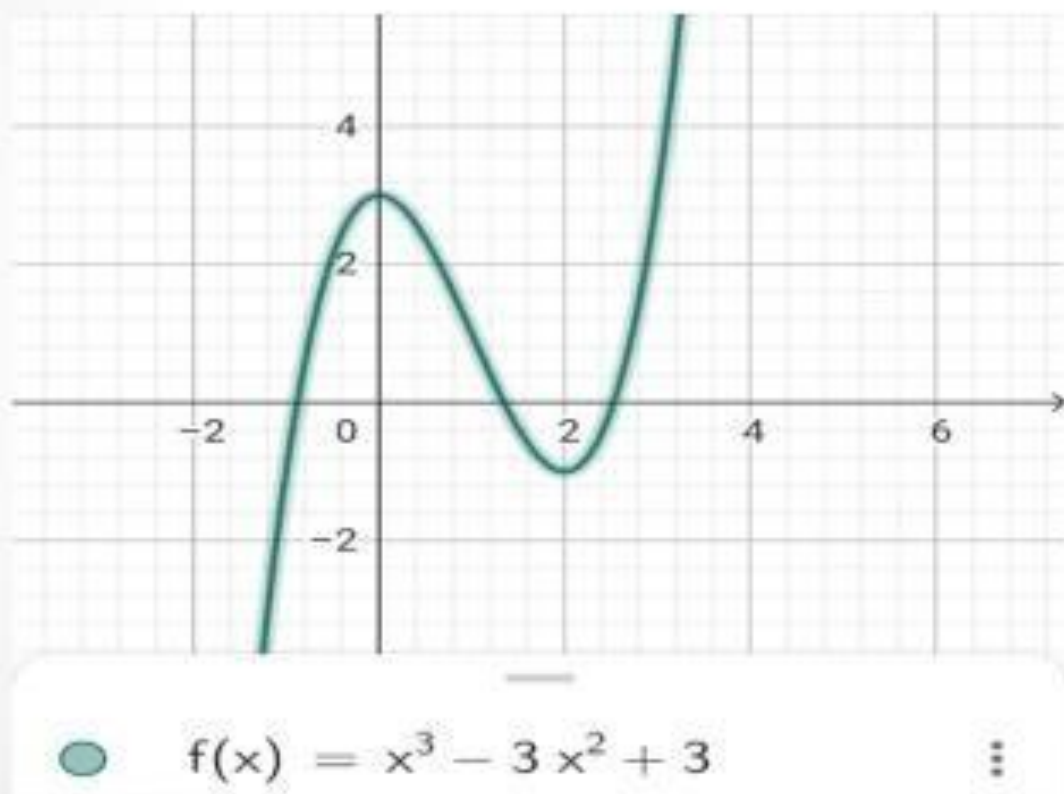
- Sustituimos el valor crítico en la función original para obtener las coordenadas del punto máximo.

$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 3 = -1$$

- Por lo tanto las coordenadas del punto mínimo son:  $(2, -1)$



Graficando la función  
obtenemos:



**PROPUESTA DE PLANEACIÓN DIDÁCTICA**  
**RECURSO SOCIOCOGNITIVO TALLER DE PENSAMIENTO VARIACIONAL I**  
“2025, Año de Rosario Castellanos Figueroa.

## Criterio de la segunda derivada

- Calculamos la primera derivada.
- Hallamos la segunda derivada.
- El resultado se iguala a cero y se obtienen los valores críticos para un máximo o mínimo.
- Evaluamos los valores críticos en la segunda derivada, si el resultado obtenido es positivo existe un punto mínimo y si es negativo existe un punto máximo.

### Existe un punto de inflexión

- En donde hay un cambio de concavidad, es decir, de cóncavo hacia arriba a cóncavo hacia abajo o de cóncavo hacia abajo a cóncavo hacia arriba.
- Se halla la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante para obtener valores críticos para un punto de inflexión.
- Con el valor crítico obtenido se evalúa en la segunda derivada para un valor un poco menor y valor un poco mayor.
- Si el resultado tiene un signo positivo, entonces es cóncavo hacia arriba y si es negativa, entonces es cóncavo hacia abajo.



### Ejemplo:

Hallar las coordenadas del punto máximo, mínimo y punto de inflexión aplicando el criterio de la segunda derivada para la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

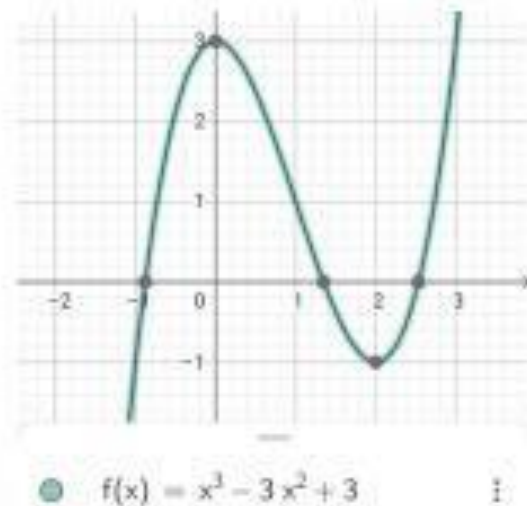
- Derivamos la función:  $f'(x) = 3x^2 - 6x$
- Igualamos a cero la derivada y obtenemos los valores críticos:  
 $3x^2 - 6x = 0$   
 $3x(x - 2) = 0$ , de aquí se obtiene que  $3x = 0$  y  $x - 2 = 0$
- Resultando  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 2$ , los cuales son los valores críticos para un punto máximo o mínimo.
- Obtenemos la segunda derivada:  $f''(x) = 6x - 6$
- Sustituimos los valores críticos en la segunda derivada, si el resultado es positivo entonces es un punto mínimo, si el resultado es negativo entonces es un punto máximo.
- $f''(0) = 6(0) - 6 = -6$ , es un punto máximo.
- $f''(2) = 6(2) - 6 = 6$ , es un punto mínimo.
- Para obtener el punto de inflexión, se iguala a cero la segunda derivada y se resuelve la ecuación.  
 $6x - 6 = 0$ , por lo tanto  $x = 1$

- Para obtener las coordenadas del punto de inflexión, se sustituye en la función original  $f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 3 = 1$
- Las coordenadas son:

El punto de inflexión es (1,1)

El punto máximo es (0,3)

El punto mínimo es (2,-1)



## Anexo 2

### Lista de cotejo para evaluar ejercicio de cierre (por equipo)

<b>Estudiantes:</b>			<b>Centro educativo:</b>	
<b>Semestre:</b>	<b>Grupo:</b>		<b>UAC:</b>	
<b>Profesor:</b>	<b>Fecha de aplicación:</b>		<b>Parcial:</b>	
Características a cumplir (Reactivos)	Valor	Cumple		Observaciones
		Sí	No	
Entrega el ejercicio resuelto en su totalidad.	0.1			
Está resuelto paso a paso.	0.1			
Presenta el ejercicio resuelto con limpieza.	0.1			
Entrega a tiempo.	0.1			
Realiza las operaciones correctamente en su calculadora.	0.1			
Presenta las coordenadas del punto máximo.	0.1			
Presenta las coordenadas del punto mínimo.	0.1			
Presenta las coordenadas del punto de inflexión.	0.1			
Presenta la grafica de la función.	0.2			
<b>Calificación:</b>				

Datos generales <sup>1</sup>						
Plantel	34 Alan Sacjun		Coordinación	Selva	Semestre	Quinto
Ubicación del plantel	Chilón		UAC	Taller de Pensamiento Variacional 1.		
Datos de la progresión del aprendizaje <sup>2</sup>						
Etapa de la progresión (Número)		8	Tiempo total de ejecución		7 horas	
Enunciado de la progresión		Construye modelos matemáticos, identificando las variables que se relacionan entre sí, obteniendo de manera intuitiva la diferencial como una herramienta para darle solución a problemas de las ciencias que le permita obtener información y analizar los resultados para la toma de decisiones. <b>C1M2, C2M1, C2M4, C3M2, C3M3.</b>				
Elementos presentes en la progresión del aprendizaje <sup>3</sup>						
Categoría		<b>C1:</b> Procedural. <b>C2:</b> Procesos de intuición y razonamiento. <b>C3:</b> Solución de problemas y modelación.				
Subcategoría		<b>C1S1:</b> Elementos aritmético-algebraicos. <b>C1S3:</b> Elementos variacionales. <b>C2S1:</b> Capacidad para observar y conjeturar. <b>C2S2:</b> Pensamiento intuitivo. <b>C3S2:</b> Construcción de modelos. <b>C3S3:</b> Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.				
Metas de aprendizaje		<b>C1M2:</b> Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. <b>C2M1:</b> Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. <b>C2M4:</b> Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto. <b>C3M2:</b> Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. <b>C3M3:</b> Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.				

<b>Aprendizaje de trayectoria (equivale al perfil de egreso)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.</li> <li>- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).</li> <li>- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.</li> </ul>

Abordaje de la progresión del aprendizaje <sup>4</sup>				
	Descripción de la estrategia o actividad	Tiempo de ejecución	Recursos/ material didáctico	Instrumentos de evaluación
<b>Apertura</b>	<b>Máximos y mínimos de una función</b> La o el docente obtiene un diagnóstico informal (preguntas) del grupo respecto al dominio de las y los estudiantes de los métodos para encontrar los máximos y mínimos de una función a través de un ejemplo de una función polinomial. Implica identificar los puntos en la gráfica de la función donde esta alcanza un valor máximo o mínimo local, es decir, un valor que es el más grande o más pequeño en su vecindad inmediata. Para ello, se utilizan las derivadas de la función, aplicando la prueba de la primera derivada o la prueba de la segunda derivada.	60 minutos	Proyector, pizarrón y plumones.	

<b>Desarrollo</b>	<p>La o el docente resuelve un problema de aplicación de máximos o mínimos de una función a través de derivadas.</p> <p>Se desea construir un tanque metálico para almacenamiento de agua, de forma cilíndrica vertical, abierto por su parte superior y de un volumen dado. Calcular las dimensiones del radio y la altura para emplear en su construcción la menor cantidad de material posible (<b>Anexo 1</b>).</p>	60 minutos	Proyector, pizarrón y plumones.	No aplica.
	<p>La o el docente resuelve un problema de aplicación de máximos o mínimos de una función a través de derivadas.</p> <p>Se desea construir una caja de base cuadrada sin tapa utilizando para ello una lámina metálica cuadrada de 180 cm de lado, recortando en cada esquina un cuadrado pequeño y doblando los bordes hacia arriba. Hallar la longitud de los lados para obtener una caja de volumen máximo (<b>Anexo 2</b>).</p>	60 minutos	Proyector, pizarrón y plumones.	No aplica.
<b>Cierre</b>	<p>Las y los estudiantes, organizados en equipos, encuentran la solución de dos problemas de aplicación empleando las derivadas de orden superior, construyendo su propio modelo matemático.</p> <p><b>Volumen</b></p> <p>Se va a construir una caja rectangular abierta con base cuadrada y un volumen de <math>32,000 \text{ cm}^3</math>. Encuentre las dimensiones que requieren la menor cantidad de material.</p>	120 Minutos	Libreta, lápiz, borrador, juegos geométricos.	Rúbrica de evaluación 1.
	<p>Se quiere construir un recipiente cilíndrico con tapa de base circular de <math>64 \text{ cm}^3</math> de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material (área total) sea la mínima.</p>	120 minutos	Libreta, lápiz, borrador.  Juegos geométricos.	Rúbrica de evaluación 2.



Fuentes de consulta		
Bibliográfica	Videográfica	Páginas web
<p><b>Cálculo diferencial e integral.</b> <b>William Anthony Granville.</b> <b>Editorial Limusa.</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Profe pepe maria, Máximos y mínimos locales. Aplicación de la derivada, Youtube, <a href="https://www.youtube.com/watch?v=MzC72tAha8">https://www.youtube.com/watch?v= MzC72tAha8</a></li> <li>- Profe pepe maria, Máximos y minimos relativos, Youtube, <a href="https://www.youtube.com/watch?v=KT-dm0DNF14">https://www.youtube.com/watch?v=KT-dm0DNF14</a></li> </ul>	<p><a href="https://gc.scalahed.com/recursos/files/r161r/w24736w/otros/archivo-4-aplicaciones.pdf">https://gc.scalahed.com/recursos/files/r161r/w24736w/otros/archivo-4-aplicaciones.pdf</a> <a href="https://matematicasconmuchotruco.wordpress.com/category/problemas-de-maximos-y-minimos/">https://matematicasconmuchotruco.wordpress.com/category/problemas-de-maximos-y-minimos/</a></p>

ELABORÓ

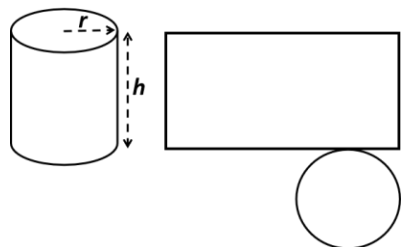
REVISÓ

Ing. Alan Sebastián Díaz Gálvez

Lic. Sergio Santos Moreno

### Anexo 1. La o el docente resuelve un problema de aplicación de máximos o mínimos de una función a través de derivadas

Se desea construir un tanque metálico para almacenamiento de agua, de forma cilíndrica vertical, abierto por su parte superior y de un volumen dado. Calcular las dimensiones del radio y la altura para emplear en su construcción la menor cantidad de material posible.



El área de la base y la cara circular del cilindro está dada por  $A = \pi r^2 + 2\pi r h$

El volumen del cilindro  $V = \pi r^2 h$

Despejando altura  $h = \frac{V}{\pi r^2}$

Sustituyendo la altura “h” en el área  $A = \pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + 2\pi \frac{V}{r}$

La primera derivada del área es  $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr} (\pi r^2 + 2\pi \frac{V}{r}) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$

Para encontrar los puntos críticos el área se iguala a cero  $\frac{dA}{dr} = 0$

Al resolver la ecuación  $2\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$

$$\pi r = \frac{V}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{V}{\pi}$$



**PLANEACIÓN DIDÁCTICA**  
**RECURSO SOCIOCOGNITIVO TALLER DE PENSAMIENTO VARIACIONAL I**  
“2025, Año de Rosario Castellanos Figueroa.

Despejando “r”  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

$$V = \pi r^2 h$$

Despejando “h” del volumen y sustituyendo “r”  $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi} \left(\frac{\pi}{V}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

Posteriormente, se encuentra la segunda derivada del área  $\frac{d^2 A}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left( 2\pi r - \frac{2V}{r^2} \right) = 2\pi + \frac{4V}{r^3}$

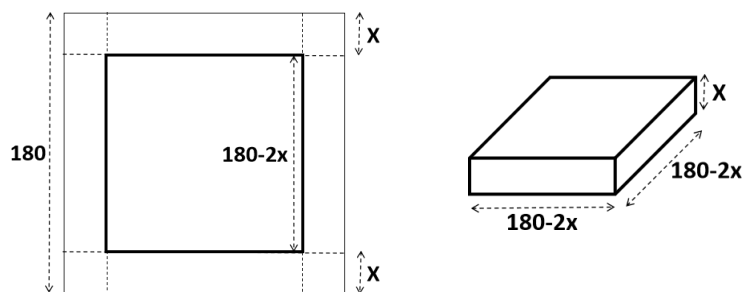
$\frac{d^2 A}{dr^2} > 0$ , como la segunda derivada es positiva, se trata de un mínimo.

Por último, se sustituye  $h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$  en la fórmula original del área.

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2 + 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right) \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right) = 3\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2, \text{ por lo que } r = h.$$

## Anexo 2. El docente resuelve un problema de aplicación de máximos o mínimos de una función a través de derivadas

Se desea construir una caja de base cuadrada sin tapa utilizando para ello una lámina metálica cuadrada de 180 cm de lado, recortando en cada esquina un cuadrado pequeño y doblando los bordes hacia arriba. Hallar la longitud de los lados para obtener una caja de volumen máximo.



La fórmula del volumen de la caja

$$V = (180 - 2x)^2 \cdot x = [2(90 - x)]^2 \cdot x = 2^2(90 - x)^2 \cdot x = 4x(90 - x)^2$$

Se encuentra la primera derivada.

$$\frac{dV}{dx} = 4(1)(90 - x)^2 + 4x[2(90 - x)(-1)] = 4(90 - x)^2 - 8x(90 - x)$$

$$\frac{dV}{dx} = 4(90 - x)(90 - x - 2x) = 4(90 - x)3(30 - x) = 12(90 - x)(30 - x)$$

Para encontrar los puntos críticos de la primera derivada  $0 = 12(90 - x)(30 - x)$

$$90 - x = 0$$

$$30 - x = 0$$

$$X = 90 \quad \text{IMPOSIBLE}$$

$$x = 30 \quad \text{REAL}$$

Como se observa,  $x = 30$  es un punto crítico o raíz real.

Posteriormente, se halla la segunda derivada.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx} [12(90 - x)(30 - x)] = -12(30 - x) + 12(90 - x)(-1) = -12(30 - x) - 12(90 - x)$$

Se sustituye  $x = 30$  en la segunda derivada para determinar si es un mínimo o un máximo.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -12(30 - 30) - 12(90 - 30) = -12(60) = -720$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} < 0 \quad \text{Como el valor de la segunda derivada es negativo, se trata de un máximo.}$$

Para encontrar el lado de la caja, se sustituye  $x = 30$  en  $L = 180 - 2x = 180 - 2(30) = 120\text{cm}$

$$x = 30\text{cm}$$

Por último, para encontrar el volumen máximo se sustituye  $x = 30$  en la fórmula principal del volumen.

$$V_{\text{máx}} = L^2 \cdot x = (120)^2 \cdot (30) = 432,000\text{cm}^3$$

## Rúbrica de evaluación 1

Las y los estudiantes organizados en equipos, encuentran la solución de un problema de aplicación empleando las derivadas de orden superior, construyendo su propio modelo matemático.

Se va a construir una caja rectangular abierta con base cuadrada y un volumen de  $32,000 \text{ cm}^3$ . Encuentre las dimensiones que requieren la menor cantidad de material.

Aspectos	4 Excelente	3 Satisfactorio	2 Mejorable	1 Insuficiente
<b>Comprensión del problema</b>	Analiza, reconoce e interpreta perfectamente los datos, identificando con certeza lo que se busca y demostrando una absoluta comprensión del problema.	Analiza, reconoce e interpreta los datos, identificando con claridad lo que se busca y demostrando una alta comprensión del problema.	Reconoce los datos e interpreta la relación entre los mismos, demostrando una comprensión elemental del problema.	No reconoce los datos, sus relaciones ni el contexto del problema, mostrando poca comprensión del mismo.
<b>Estrategia</b>	Siempre utiliza estrategias heurísticas efectivas y eficientes, construyendo modelos matemáticos sencillos con la información sobre lo que significa cada letra o número.	Acostumbra a usar estrategias heurísticas efectivas y eficientes, con modelos matemáticos sin la información sobre lo que significa cada letra o número.	Algunas veces usa una estrategia heurística eficiente, pero falta firmeza y claridad.	En contadas ocasiones usa una estrategia heurística eficiente. Se detecta incoherencia.
<b>Planteamiento razonado</b>	Detalla los pasos seguidos, relacionando y aplicando en grado óptimo los conceptos matemáticos necesarios.	Detalla los pasos seguidos y aplica correctamente los conceptos matemáticos necesarios.	Detalla los pasos seguidos y muestra un aceptable conocimiento de los conceptos matemáticos.	No detalla los pasos seguidos y se aprecia desconocimiento en los conceptos matemáticos necesarios.

<b>Ejecución técnica</b>	Identifica la fórmula aplicable, utiliza adecuada y rigurosamente el lenguaje matemático, realiza cálculos correctos y tiene en cuenta las unidades de medida.	Identifica la fórmula aplicable, utiliza adecuadamente el lenguaje matemático y realiza cálculos correctos, pero no tiene en cuenta las unidades de medida.	Identifica la fórmula aplicable, usa de manera aceptable el lenguaje matemático y comete errores leves.	No identifica la fórmula aplicable, no usa el lenguaje matemático y comete bastantes errores de cálculo.
<b>Solución del problema</b>	Aporta correctamente la solución del problema, analiza y discute sobre su unicidad y reflexiona y valora sobre su fiabilidad. Revisa el proceso, detecta si hay errores y procede a su rectificación.	Aporta correctamente la solución del problema, analiza y discute sobre su unicidad y reflexiona y valora sobre su fiabilidad.	Aporta la solución correcta, pero no reflexiona sobre su fiabilidad.	No aporta la solución correcta.

## Rúbrica de evaluación 2

Las y los estudiantes organizados en equipos, encuentran la solución de un problema de aplicación empleando las derivadas de orden superior, construyendo su propio modelo matemático.

Se quiere construir un recipiente cilíndrico con tapa de base circular de  $64 \text{ cm}^3$  de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material (área total) sea la mínima.

Aspectos	4 Excelente	3 Satisfactorio	2 Mejorable	1 Insuficiente
<b>Comprensión del problema</b>	Analiza, reconoce e interpreta perfectamente los datos, identificando con certeza lo que se busca y demostrando una absoluta comprensión del problema.	Analiza, reconoce e interpreta los datos, identificando con claridad lo que se busca y demostrando una alta comprensión del problema.	Reconoce los datos e interpreta la relación entre los mismos, demostrando una comprensión elemental del problema.	No reconoce los datos, sus relaciones ni el contexto del problema, mostrando poca comprensión del mismo.
<b>Estrategia</b>	Siempre utiliza estrategias heurísticas efectivas y eficientes, construyendo modelos matemáticos sencillos con la información sobre lo que significa cada letra o número.	Acostumbra a usar estrategias heurísticas efectivas y eficientes, con modelos matemáticos sin la información sobre lo que significa cada letra o número.	Algunas veces usa una estrategia heurística eficiente, pero falta firmeza y claridad.	En contadas ocasiones usa una estrategia heurística eficiente. Se detecta incoherencia.
<b>Planteamiento razonado</b>	Detalla los pasos seguidos, relacionando y aplicando en grado óptimo los conceptos matemáticos necesarios.	Detalla los pasos seguidos y aplica correctamente los conceptos matemáticos necesarios.	Detalla los pasos seguidos y muestra un aceptable conocimiento de los conceptos matemáticos.	No detalla los pasos seguidos y se aprecia desconocimiento en los conceptos matemáticos necesarios.

<b>Ejecución técnica</b>	Identifica la fórmula aplicable, utiliza adecuada y rigurosamente el lenguaje matemático, realiza cálculos correctos y tiene en cuenta las unidades de medida.	Identifica la fórmula aplicable, utiliza adecuadamente el lenguaje matemático y realiza cálculos correctos, pero no tiene en cuenta las unidades de medida.	Identifica la fórmula aplicable, usa de manera aceptable el lenguaje matemático y comete errores leves.	No identifica la fórmula aplicable, no usa el lenguaje matemático y comete bastantes errores de cálculo.
<b>Solución del problema</b>	Aporta correctamente la solución del problema, analiza y discute sobre su unicidad y reflexiona y valora sobre su fiabilidad. Revisa el proceso, detecta si hay errores y procede a su rectificación.	Aporta correctamente la solución del problema, analiza y discute sobre su unicidad y reflexiona y valora sobre su fiabilidad.	Aporta la solución correcta, pero no reflexiona sobre su fiabilidad.	No aporta la solución correcta.